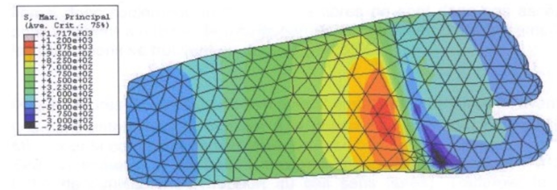
Résistance des matériaux

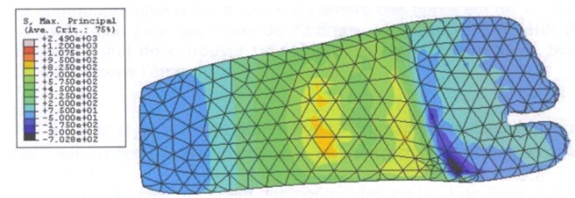
Flexion

Rappels de statique, hyperstatique
Flexion simple, états de contraintes, déformations
Méthode des équations différentielles, déformées
Flexion combinée

Energies de déformation élastique
Critères de performance
Concentrations de contraintes
Les limites de l'élasticité



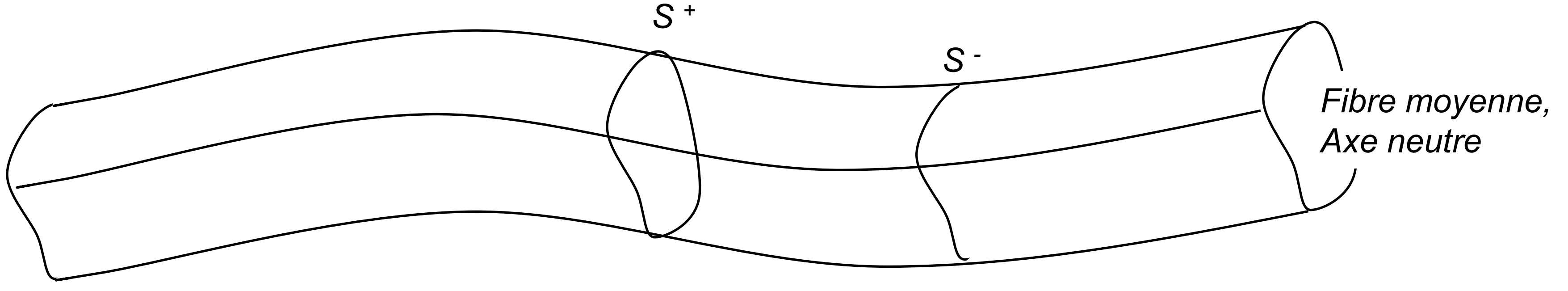
σ_{max}=1.2 MPa



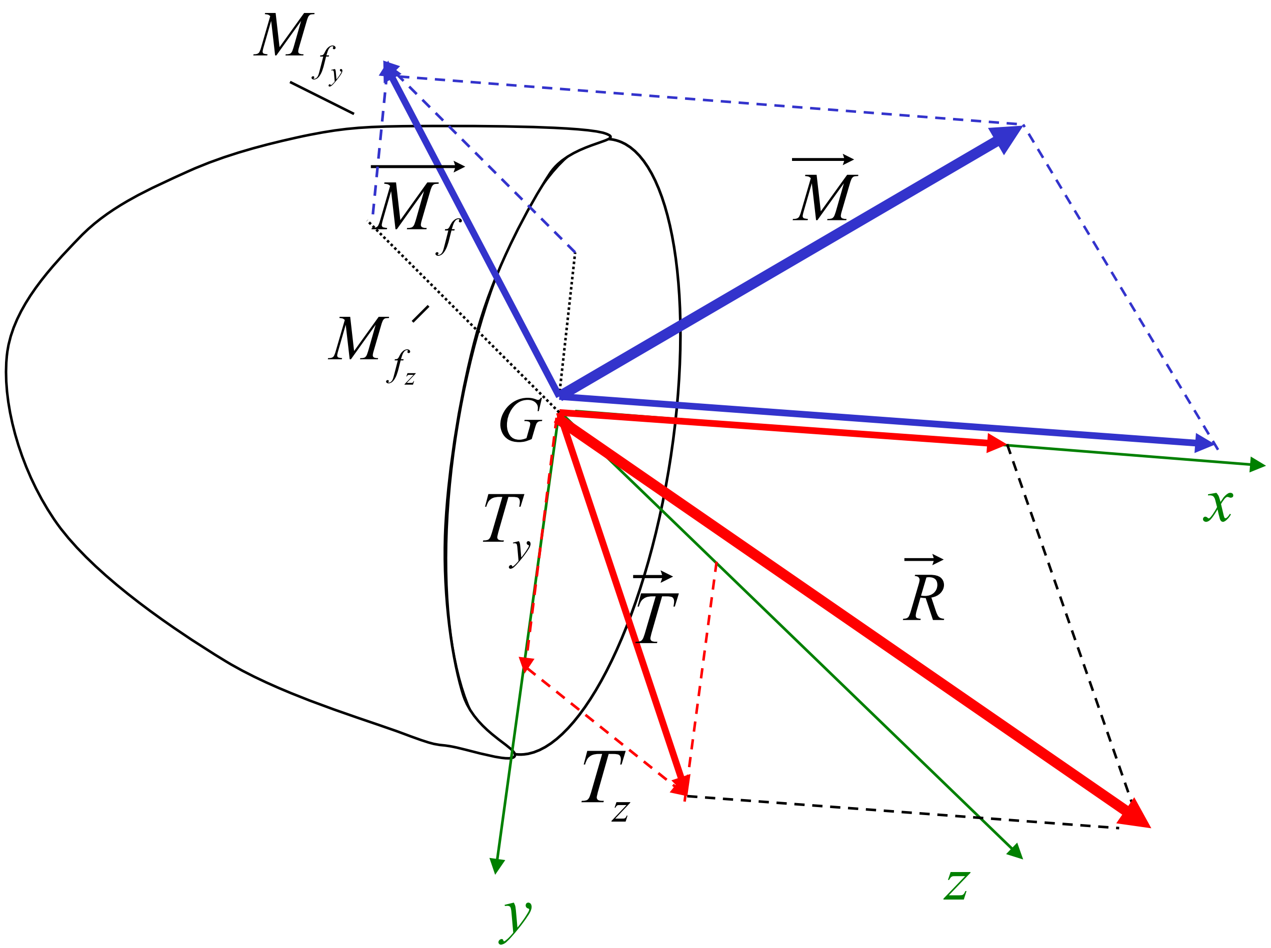
σ_{max}=0.85 MPa

Flexion

- pure, simple, combinée
- poutres, poutres droites
- contraintes normales
- déformations
- les équations différentielles
- calculs de poutres
- contraintes tangentielles
- état de contraintes, isostatiques
- déformées de poutres
- superposition et poutres hyperstatiques



Flexion



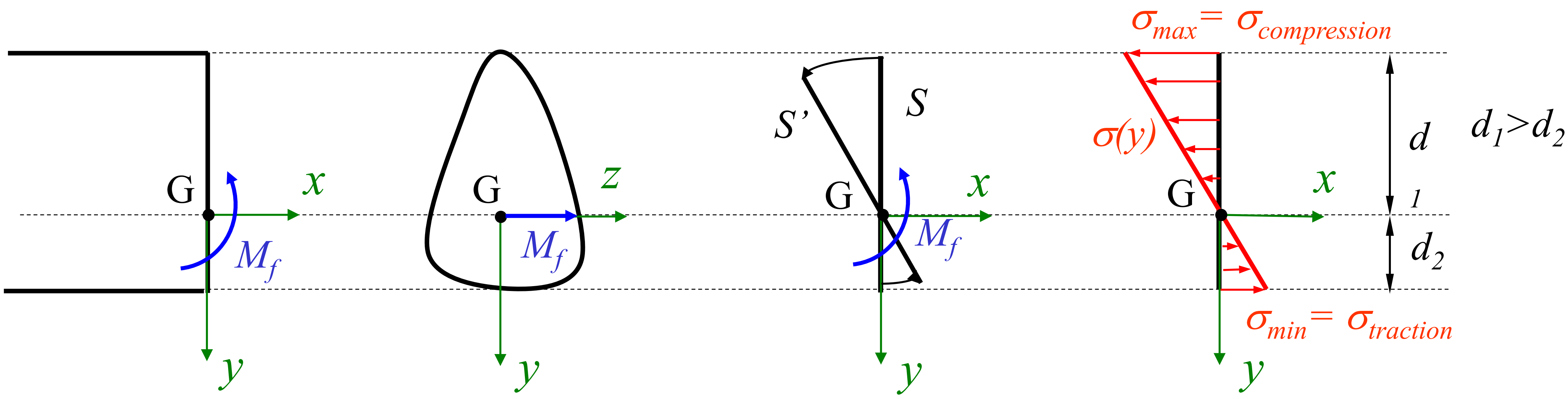
- *Combinée* $M_f + M_t$
- *Simple* *Torseurs* $\equiv \overrightarrow{M_f}$ et $\vec{T}$
  $\perp$ entre eux
- *Pure* $\vec{T} = 0, \quad (\Rightarrow \vec{M} = cste)$

H • *M_f ne comporte que $M_{fz}=M \perp$ à Gxy le plan de flexion*

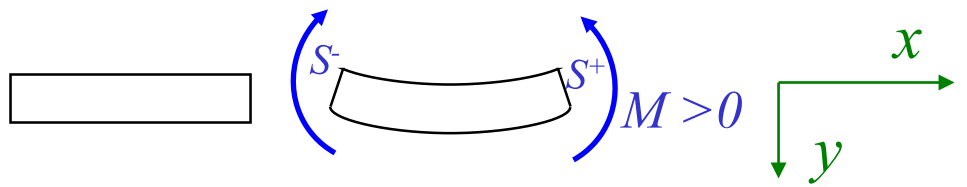
H • *La fibre moyenne est une droite confondue avec l'axe Gx*

H • *S' se déduit de S par simple rotation autour de Gz $\Rightarrow$Bernoulli OK*

Flexion



Paroi supérieure rendue concave



Fibres dans la direction y>0 sont sous traction

Les équations d'équilibre de la section sont toutes nulles sauf $M = \iint_s \sigma \cdot y \cdot dS$

S' par rotation de $S \Rightarrow \sigma \approx \mathrm{y} \equiv \sigma = K \cdot y$

$$\left.\begin{array}{l} M = \iint_s \sigma \cdot y \cdot dS \\ \sigma = K \cdot y \end{array}\right\} M = K \underbrace{\iint_s y^2 dS}_{=I_z}$$

$$\Rightarrow K = \frac{M}{I_z}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y}$$

$\rightarrow \quad \sigma = 0$ sur G_z ou $y = 0 \equiv$ axe neutre de la section

$\rightarrow \quad \sigma > 0$ pour $y > 0$

$\sigma < 0$ (compression) pour $y < 0$

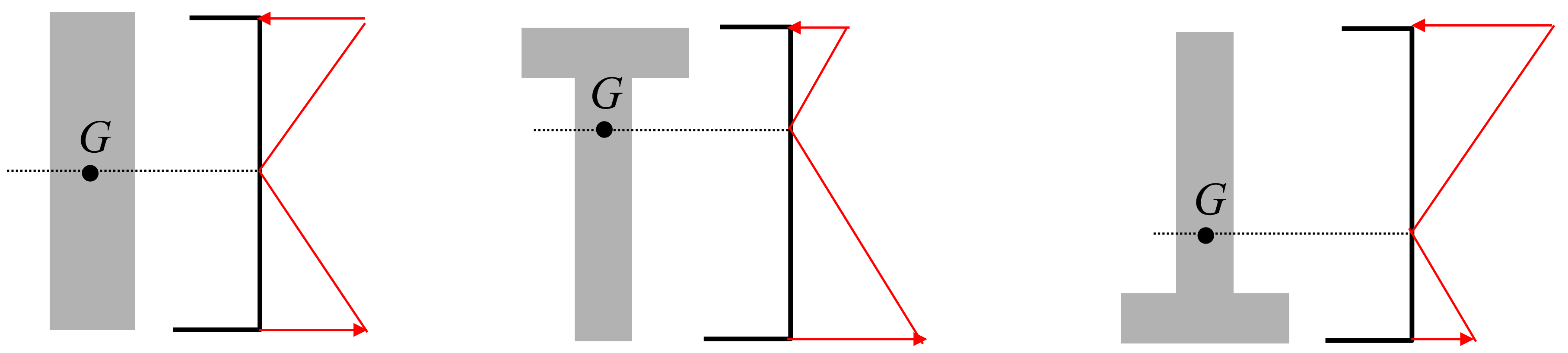
$$\rightarrow \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot d_1 \quad , \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{I_z} \cdot d_2$$

$\rightarrow \quad \dfrac{I}{d_i} =$ Moment de résistance à la flexion $\equiv W_i$

Design

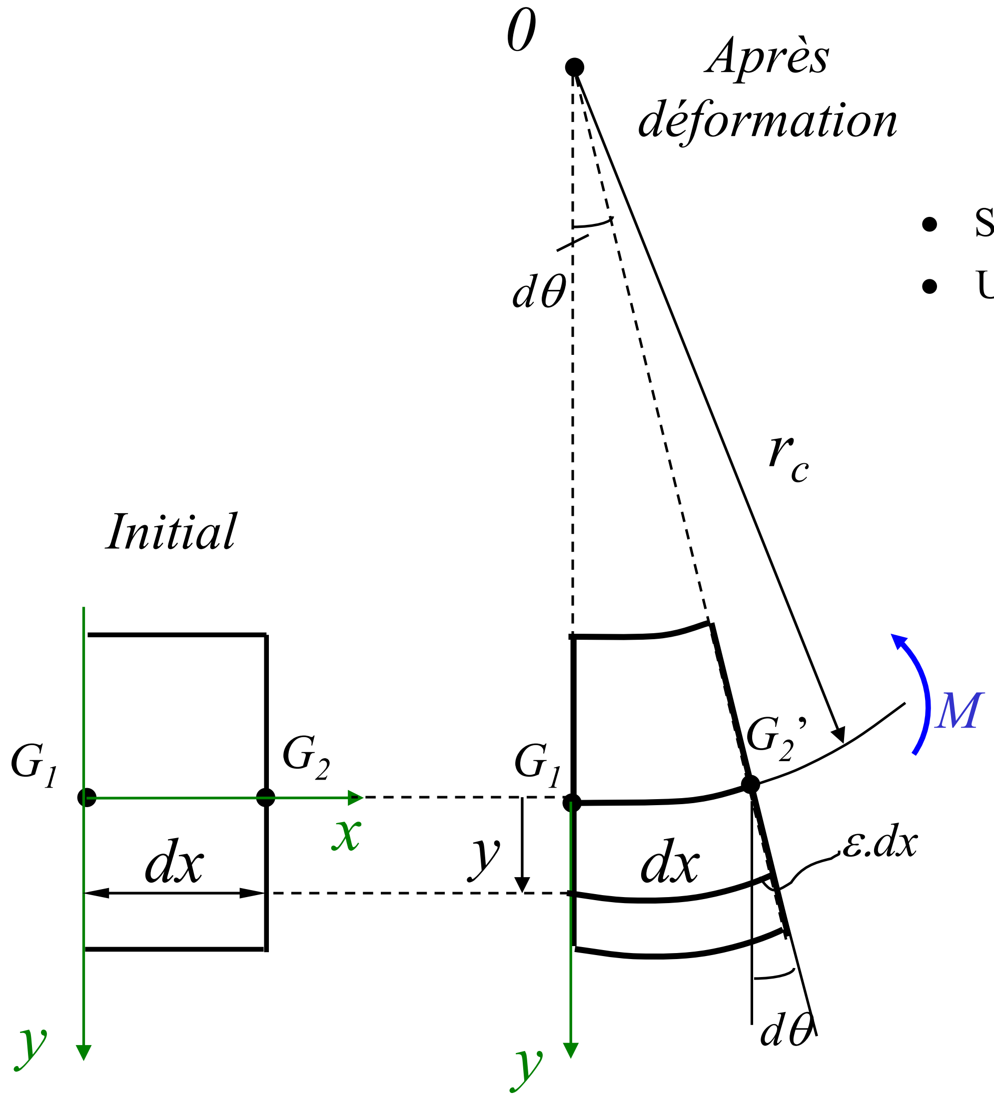
Sections de même surface (=même quantité de matière répartie différemment) $\rightarrow$ I varie

Si $I = 1 \Rightarrow$ $I = 1{,}78$ $I = 3{,}06$ $I = 7{,}48$ $I = 8{,}88$



En variant la position de l'axe neutre, on peut varier le rapport σ_c / σ_t

Déformation en flexion pure



- Sur l'axe neutre $\sigma = 0 \Rightarrow \overline{G_1G_2'}$ reste $\overline{G_1G_2} = dx$ et $r_c \cdot d\theta = dx$
- Une fibre à y s'allonge de $\varepsilon \cdot dx$ avec

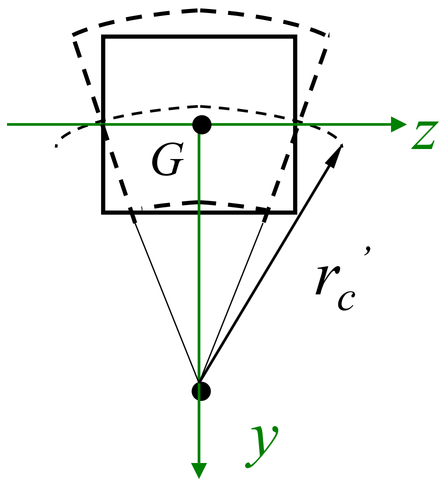
$$y \cdot d\theta = \varepsilon \cdot dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{M}{I} \cdot \frac{y}{E} dx$$

$$\rightarrow d\theta = \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx \longrightarrow \boxed{\frac{1}{r_c} = \frac{M}{E \cdot I}}$$

<u>*Remarque*</u>

Déformation latérale ≡ dilatation et contraction dues aux $\sigma_{normales}$

Vu la distribution des σ il est facile de voir qu'une section rectangulaire se déforme comme:



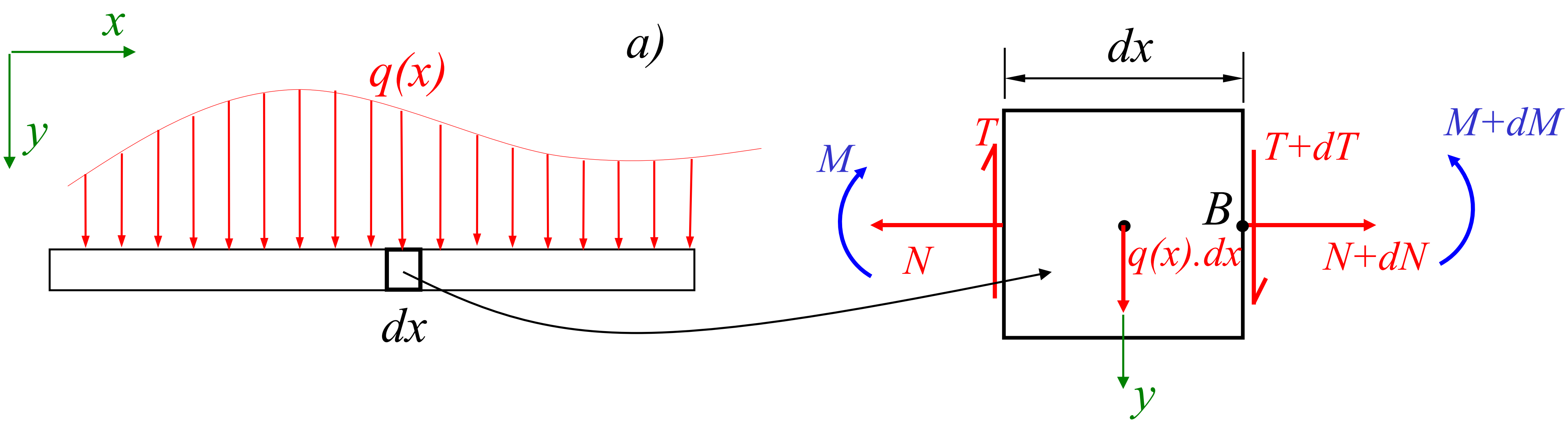
$$\frac{1}{r_c'} = \frac{\nu}{r_c} = \nu \frac{M}{E \cdot I}$$

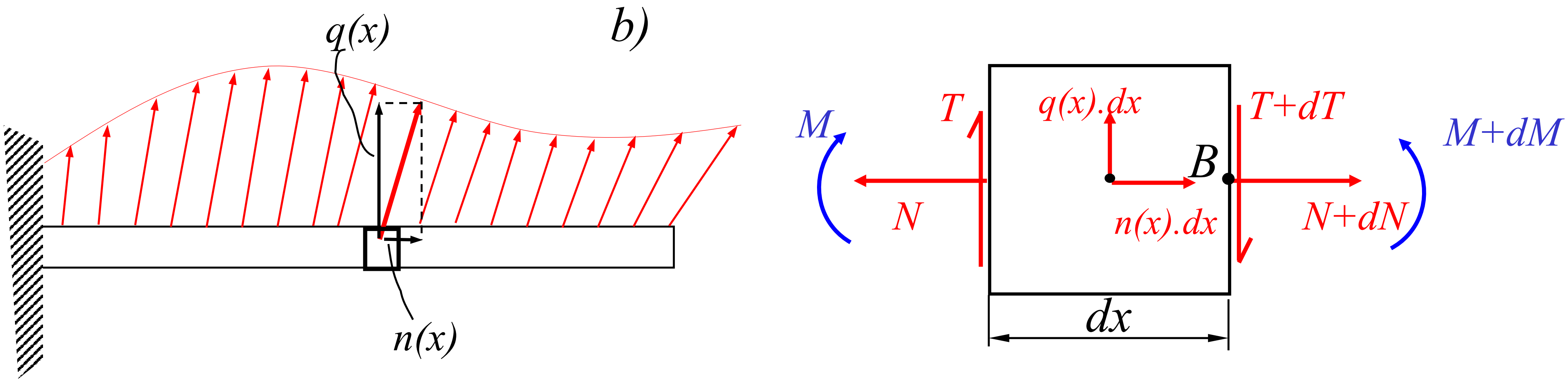
Coefficient de Poisson

$$\nu = \frac{r_c}{r_c'}$$

Léger déplacement de l'axe neutre, négligeable en pratique

Relations entre N, T, M: les équa. diff. de la flexion





a)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow -T + q(x)dx + T + dT = 0 \qquad \rightarrow \frac{dT}{dx} = -q(x)$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow -M - Tdx + \underbrace{q(x)dx \cdot \frac{dx}{2}}_{\approx 0} + M + dM = 0 \qquad \rightarrow \frac{dM}{dx} = T$$

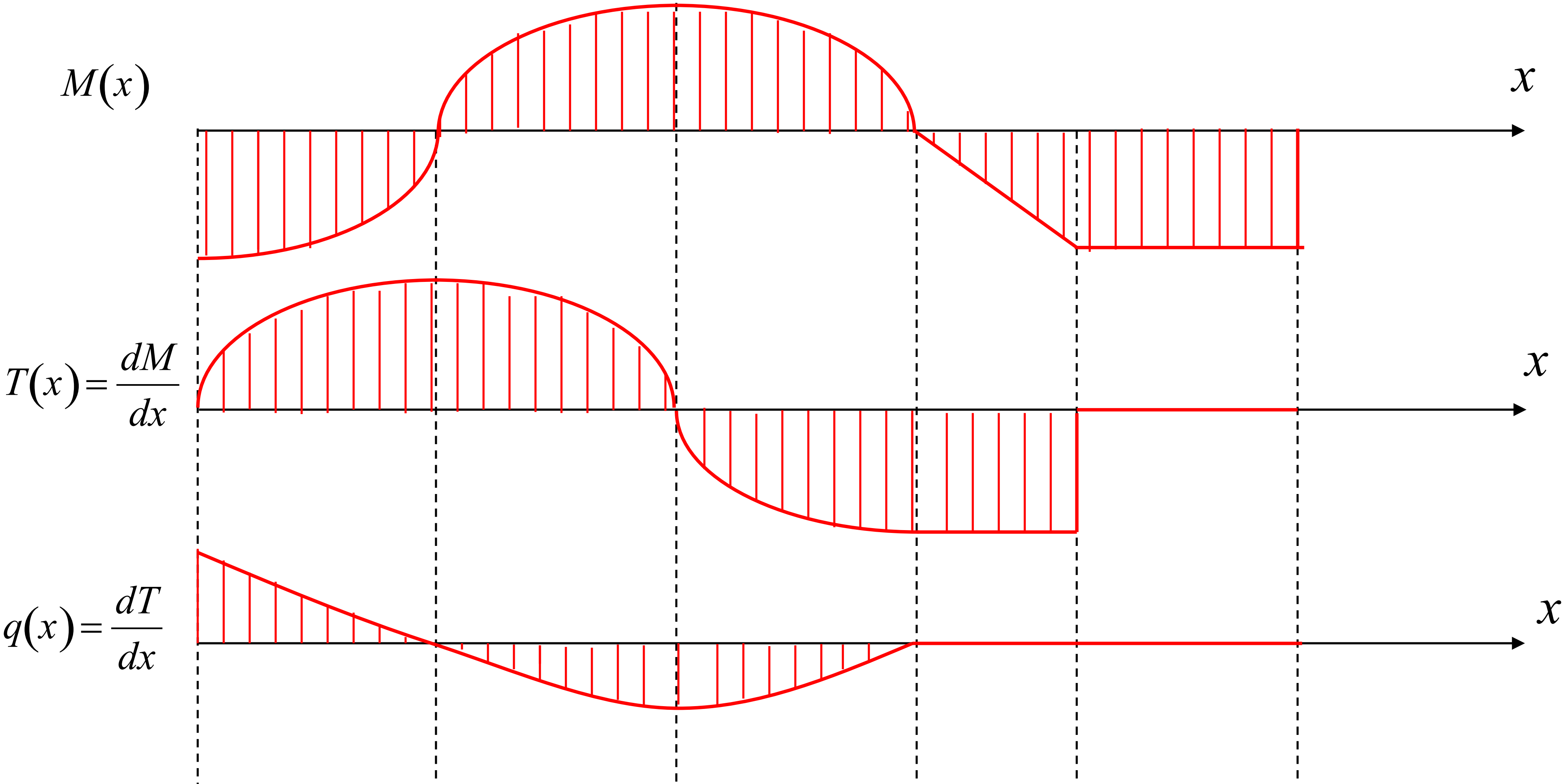
$$\rightarrow \frac{d^2 M}{dx} = \frac{dT}{dx} = -q(x)$$

b)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N + n(x)dx + N + dN = 0 \qquad \rightarrow \quad \frac{dN}{dx} = -n(x)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -T - q(x)dx + T + dT = 0 \qquad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = q(x)$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -M - Tdx - \underbrace{q(x)dx \cdot \frac{dx}{2}}_{\approx 0} + M + dM = 0 \qquad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = T \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

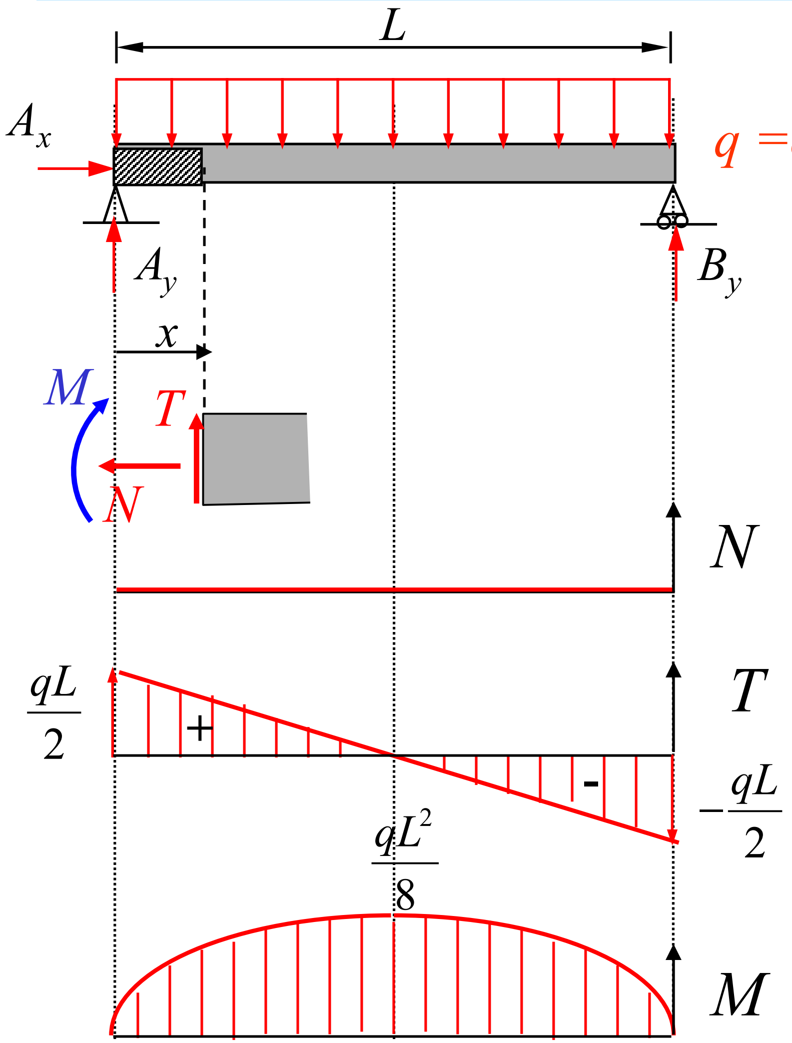


si $n(x)=0 \rightarrow N=cste$

si $n(x)=cste \rightarrow N$ *varie linéairement en x*

si $q(x)=0 \Rightarrow T=cste \rightarrow M$ *varie linéairement en x*

Poutre simple uniformément chargée



Equilibre de la poutre

$$\Sigma \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow \quad A_x = 0$$

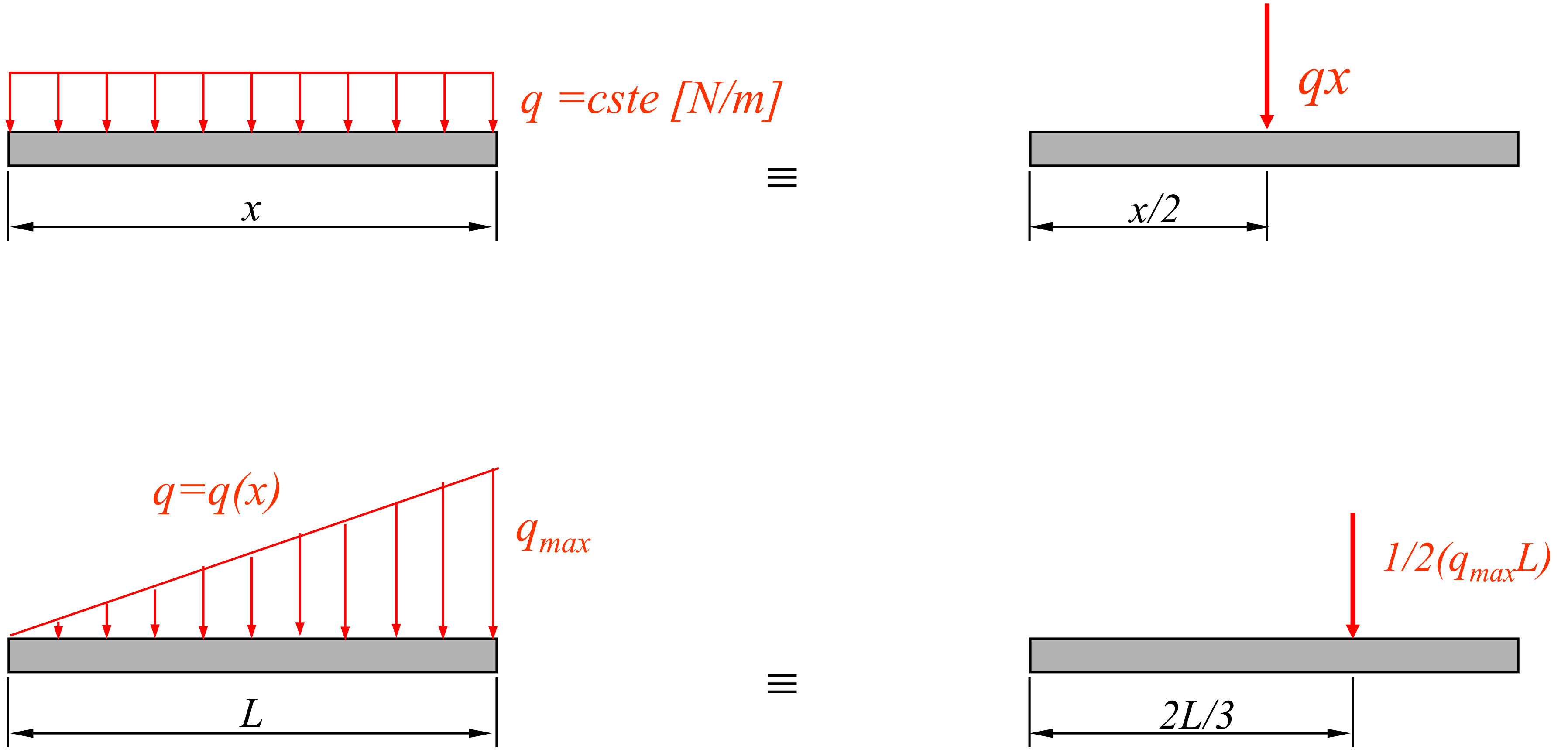
$$\Sigma \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow \quad A_y = B_y = \frac{q \cdot L}{2}$$

Réduction des efforts dans S à x

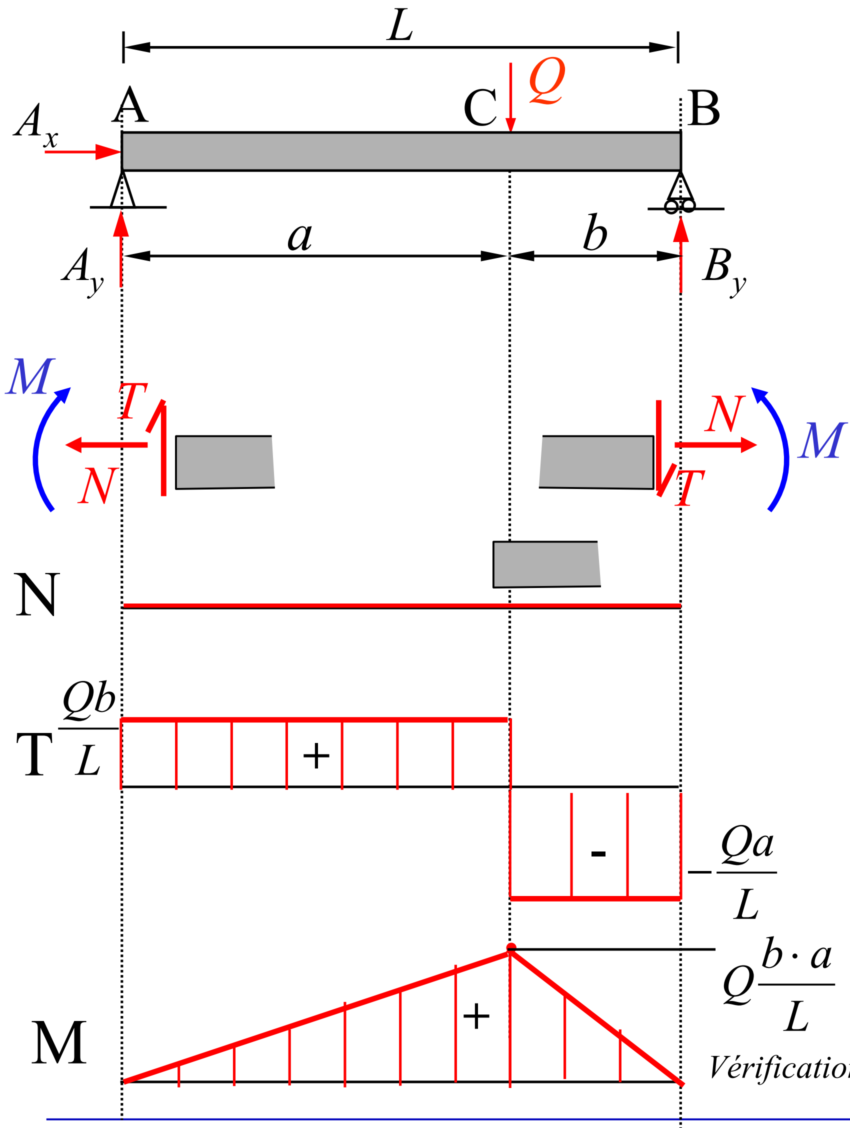
- $N(x) = -A_x = 0$
- $T(x) = A_y - q \cdot x = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x \quad \rightarrow$ Linéaire
- $M(x) = A_y \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot L}{2} x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \rightarrow$ Parabolique

$$M_{\max} \Rightarrow \frac{dM}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{L}{2} \quad \rightarrow M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

Distributions de charges



Poutre simple avec force transversale concentrée



Equilibre de la poutre

$$\Sigma \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma \overrightarrow{M} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{Q \cdot b}{L}; B_y = \frac{Q \cdot a}{L}$$

Diagrammes NTM

$$\rightarrow \text{Sur } S_A : \quad N = -A_x = 0; \; T = A_y = \frac{Q \cdot b}{L}; \; M = A_y \cdot \underset{x=0}{x} = 0$$

$$\rightarrow \text{Sur } S_B : \quad N = 0; \; T = -B_y = -\frac{Q \cdot a}{L}; \; M = 0$$

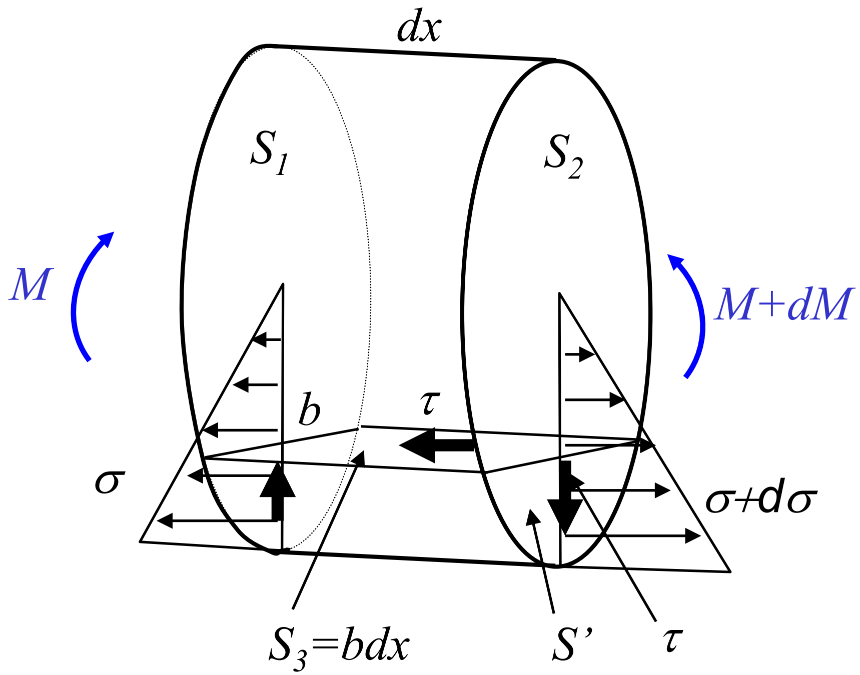
$\rightarrow$ Section proche, juste à gauche de C :

$$N = 0 \,; T = Q\frac{b}{L}$$

$$M = A_y \cdot a = Q\frac{b \cdot a}{L} = M_{\max}$$

Vérification des courbes avec $\frac{dM}{dx} = T$

Contraintes tangentielles *en flexion simple*



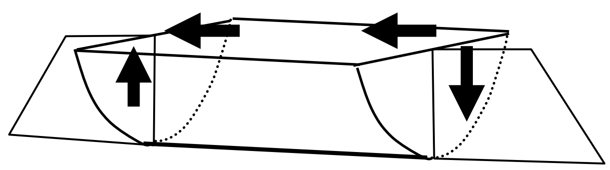
$$-\int_{S'}\sigma dS' + \int_{S'}(\sigma + d\sigma)dS' - \tau\, b\, dx = 0$$

$$\int_{S'} d\sigma dS' = \tau\, b\, dx$$

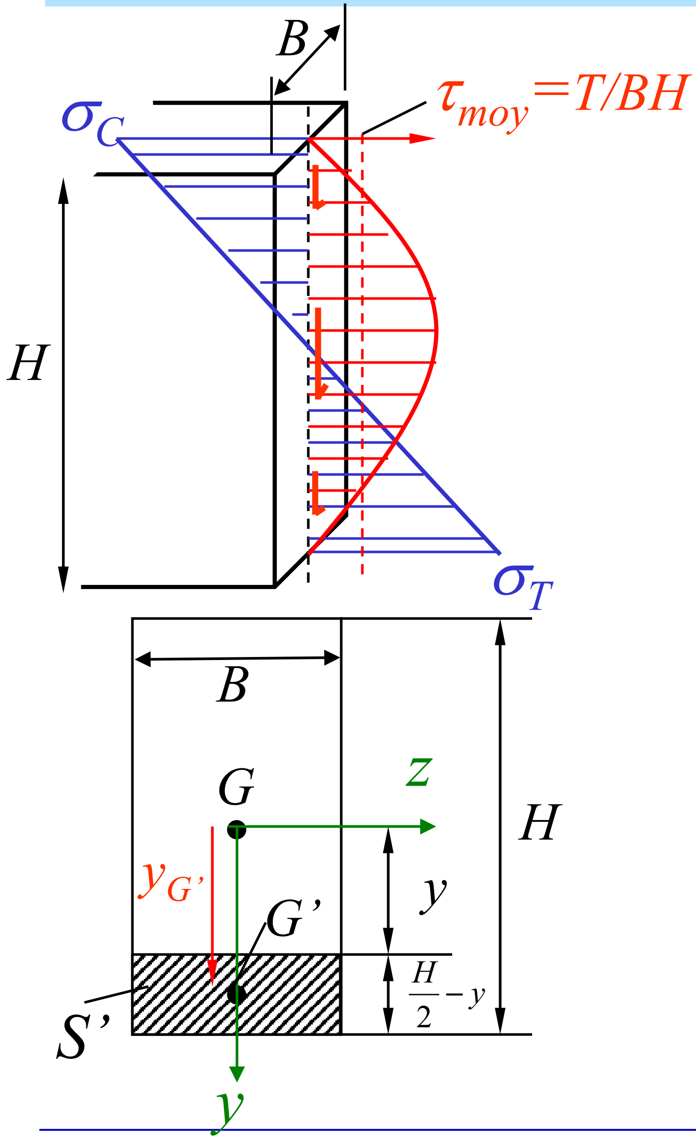
$$mais \quad \sigma = \frac{M\,y}{I} \quad donc\ d\sigma = \frac{y}{I}\frac{dM}{dx}dx = \frac{y}{I}Tdx$$

$$\tau\, b\, dx = \frac{T}{I}dx\int_{S'} ydS' = \frac{T}{I}dx\, M_{S'}$$

$$\tau = \frac{T}{I}\frac{M_{S'}}{b}$$



Contraintes tangentielles



$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot M_S'}{I \cdot b}}$$

$$M_{S'} = \int_{S'} y_{G'} \cdot dS'$$

$$\rightarrow y_{G'} = y + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} - y\right) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{H}{2}\right)$$

$$M_{S'} = \int_{S'} \frac{1}{2}\left(y + \frac{H}{2}\right) \cdot dS' = B\left(\frac{H}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{H}{2}\right) = \frac{BH^2}{8}\left(1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right)$$

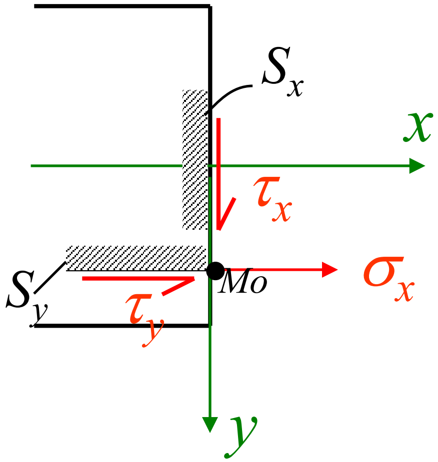
$$I = \frac{BH^3}{12}$$

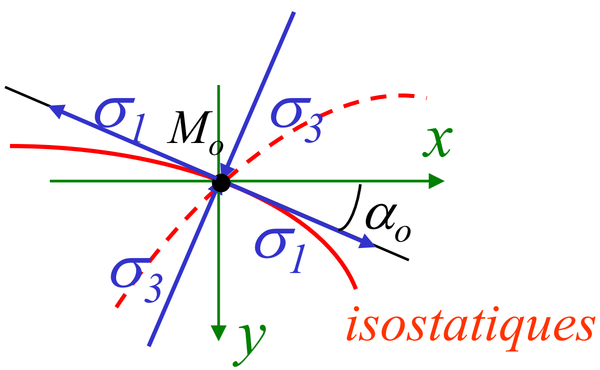
$$b = B$$

$$\tau = \frac{T \cdot M_S'}{I \cdot b} = \frac{T \cdot \frac{BH^2}{8}\left(1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right)}{\frac{BH^3}{12} \cdot b} = \frac{T}{B.H} \cdot \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right) = \frac{3}{2}\tau_m\left(1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\tau = \frac{3}{2}\tau_m\left(1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right)}$$

Etat de contraintes





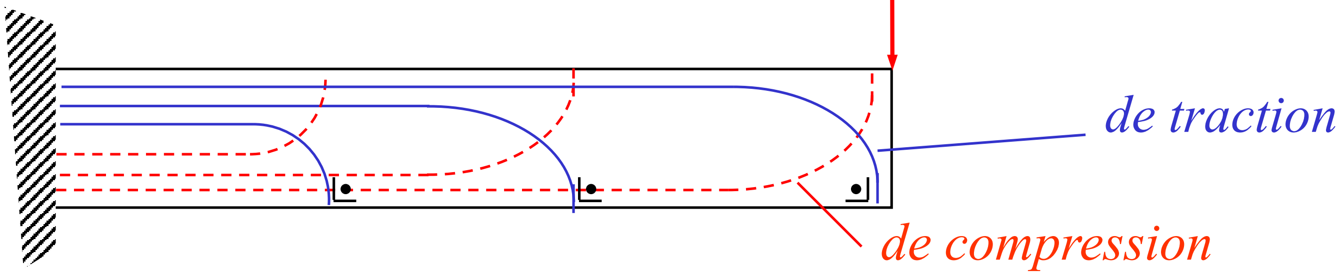
En <u>*Mo*</u> *d'une section d'une poutre en flexion simple les contraintes sont:*

$$\left.\begin{array}{lll} \text{sur} & S_x & \sigma_x = \dfrac{M}{I}\,y \\ & & \tau_x = \dfrac{T \cdot M_S'}{I \cdot b} \\ \text{sur} & S_y & \sigma_y = 0 \\ & & \tau_y = -\tau_x \end{array}\right\}$$

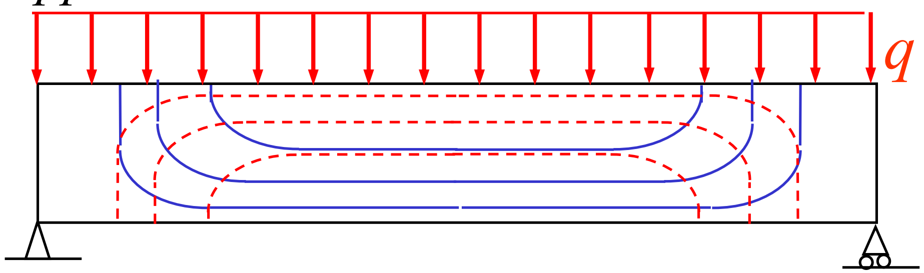
Donc état bidimensionnel, donc K_x, K_y *et le diamètre du cercle de Mohr sont connus, ainsi que la direction* α_o *et les contraintes principales*

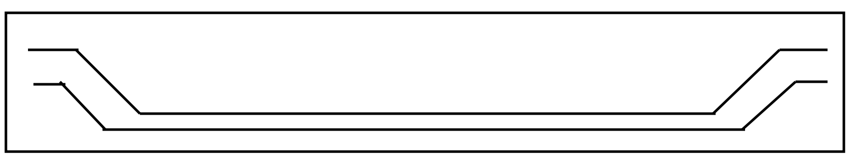
Les isostatiques

En console ou encastrée



2 appuis





Armatures de renforts: béton armé, composites

En flexion simple

- *Les isostatiques sont des courbes planes identiques pour tous les plans z =cste*
- *Tracer les iso* $\leftarrow$ *calculer* σ_1, σ_2, σ_3, *en plusieurs points*

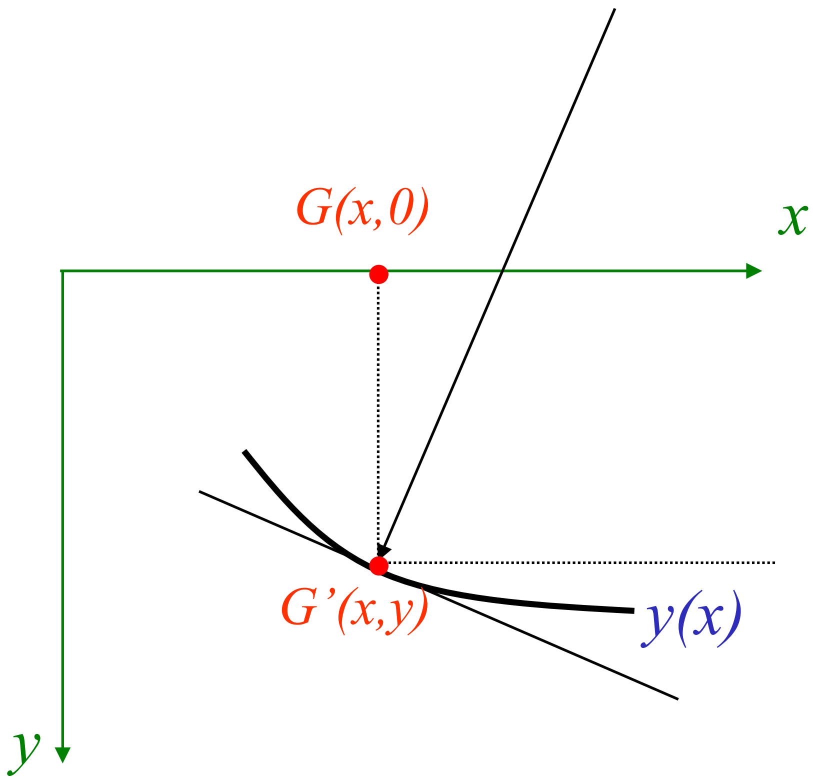
  $\leftarrow$ *équation différentielle, résoudre numériquement*

  $\leftarrow$ *jauges de déformation, de contraintes*

  $\leftarrow$ *vernis craquants*

  $\leftarrow$ *photoélasticité*
- *Les isostatiques sont tangentielles aux fibres extérieurs car* $\tau = 0$ *sur les bords*
- *Les isostatiques se rencontrent sur l'axe neutre avec un angle* $\pm\pi/4$ *car on a du cisaillement pur*
- *Poutre symétrique par rapport à l'axe neutre* $\Rightarrow$ *les isostatiques sont symétriques*

Déformée des poutres droites en flexion simple



G(x,0): centre de gravité de la poutre

Déformation $\Rightarrow$ déplacement vertical de G

H *Le déplacement horizontal est négligeable ici .*

Ce n'est pas le cas pour les lames minces et pour les poutres courbes

G'(x,y)

La courbure $\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{M}{E \cdot I}$

La courbure de y(x) est donnée par

$$\frac{1}{r_c} = \pm \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$$

Dans le cas H *y' est très petit*

y'² est négligeable

$$\boxed{\frac{1}{r_c} \cong \pm y''}$$

$$\boxed{y'' = -\frac{M}{E \cdot I}}$$

Si M >0

la pente y' diminue

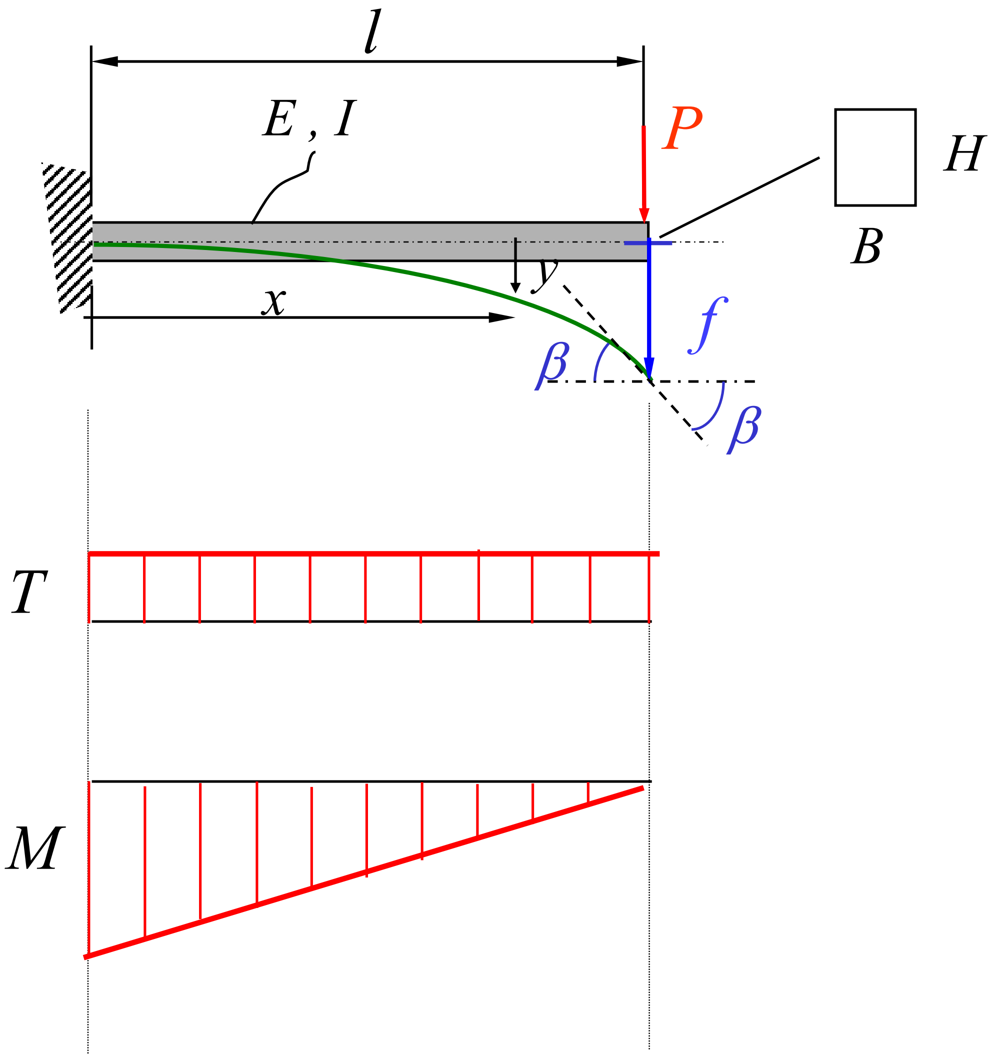
⇒ y'' est <0

Déformée due à l'effort tranchant

$$y_T = \underbrace{\eta}_{\substack{coefficient \\ de \ \ forme}} \frac{T}{G \cdot S}$$

Cette déformée représente moins de 1% $\Rightarrow$ *négligée*

Déformée d'une poutre de section rectangulaire en console



$$M(x) = -P\,(l-x)$$

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$E \cdot I \cdot y'' = P\,(l-x)$$

$$E \cdot I \cdot y' = P\,l\,x - \frac{P\,x^2}{2} + C_1 \qquad 1$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{P\,l\,x^2}{2} - \frac{P\,x^3}{6} + C_1 x + C_2 \qquad 2$$

Conditions aux limites

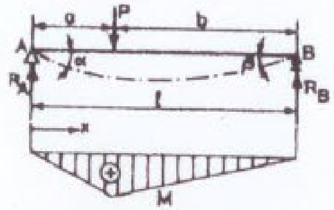
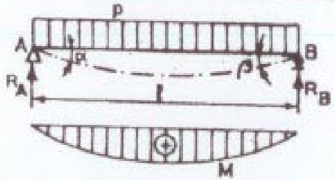
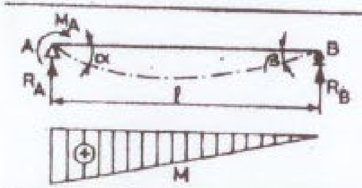
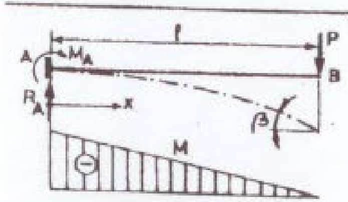
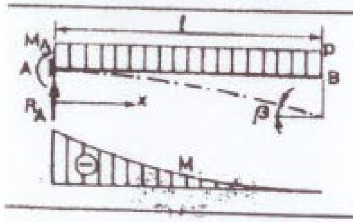
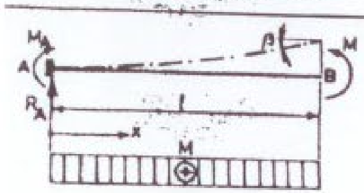
$x = 0$ $y' = 0$ donc $C_1 = 0$

$x = 0$ $y = 0$ donc $C_2 = 0$

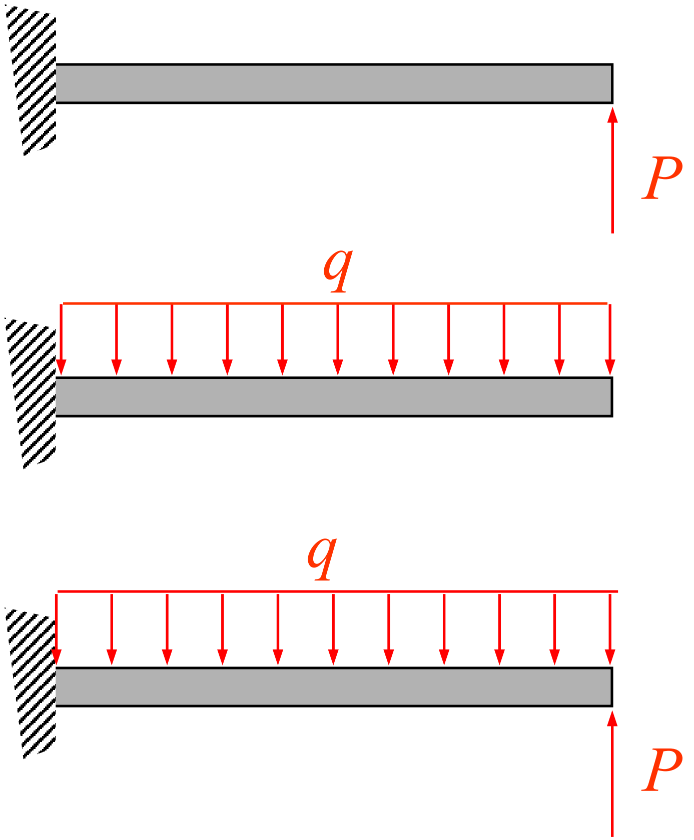
$$\boxed{\Rightarrow y = \frac{P}{6E \cdot I}\,x^2\,(3l - x)}$$

pente $y'(\text{en } x = l) \approx \beta = \dfrac{P \cdot l^2}{2E \cdot I}$ 1

2 avec $x = l \Rightarrow f = \dfrac{P \cdot l^3}{3E \cdot I}$

Cas de charge	Réactions	M_{max}	Elastique	Rotations	Flèches
	$R_A = \frac{P\,b}{\ell}$ $R_B = \frac{P\,a}{\ell}$	$+\frac{P\,a\,b}{\ell}$ pour x=a	pour $x < a$: $y_1 = \frac{P}{6\,\ell E I}\left(2\,a b^2 x + a^2 b x - b x^3\right)$ pour $x > a$: $y_2 = \frac{P}{6\,\ell E I}\left(2\,a^2 b(\ell-x) + a b^2(\ell-x) - a(\ell-x)^3\right)$	$\alpha = \frac{P\,ab\,(\ell+b)}{6\,\ell E I}$ $\beta = \frac{-Pab\,(\ell+a)}{6\,\ell E I}$	Pour $x = a$ $\quad f_a = \frac{P\,a^2 b^2}{3\,\ell E I}$ $f = f_{max}$ pour $x = a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}}$ si $a > b$ pour $x = \ell - b\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2a}{3b}}$ si $a < b$ Si $a=b=\ell/2$ $\quad f_{max} = \frac{P\,\ell^3}{48\,E I}$
	$R_A = \frac{p\,\ell}{2}$ $R_B = \frac{p\,\ell}{2}$	$+\frac{p\,\ell^2}{8}$	$y = \frac{p}{24\,E I}\left(x^4 - 2\,\ell\,x^3 + \ell^3 x\right)$	$\alpha = \frac{p\,\ell^3}{24\,E I}$ $\beta = \frac{-p\,\ell^3}{24\,E I}$	$f_{max} = \frac{5}{384}\,\frac{p\ell^4}{E I}$ pour $x = \frac{\ell}{2}$
	$R_A = -\frac{M}{\ell}$ $R_B = +\frac{M}{\ell}$	M_A	$y = \frac{M}{6\,\ell E I}\left(x^3 - 3\,\ell x^2 + 2\,\ell^2 x\right)$	$\alpha = \frac{M\,\ell}{3\,E I}$ $\beta = \frac{-M\,\ell}{6\,E I}$	$f_{max} = \frac{M\,\ell^2\sqrt{3}}{27\,E I}$ pour $x = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
	$R_A = P$ $M_A = -P\,\ell$	$-P\,\ell$ pour x=0	$y = \frac{P}{6\,E I}\left(3\,\ell x^2 - x^3\right)$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{P\,\ell^2}{2\,E I}$	$f_{max} = \frac{P\,\ell^3}{3\,E I}$ pour $x = \ell$
	$R_A = p\,\ell$ $M_A = \frac{-p\,\ell^2}{2}$	$\frac{-p\,\ell^2}{2}$ pour x=0	$y = \frac{p}{24\,E I}\left(6\,\ell^2 x^2 - 4\,\ell x^3 + x^4\right)$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{p\,\ell^3}{6\,E I}$	$f_{max} = \frac{p\,\ell^4}{8\,E I}$ pour $x = \ell$
	$R_A = 0$ $M_A = M$	M=const.	$y = \frac{-M}{2\,E I}\,x^2$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{-M\ell}{E I}$	$f_{max} = \frac{-M\ell^2}{2\,E I}$ Pour $x = \ell$

Superposition

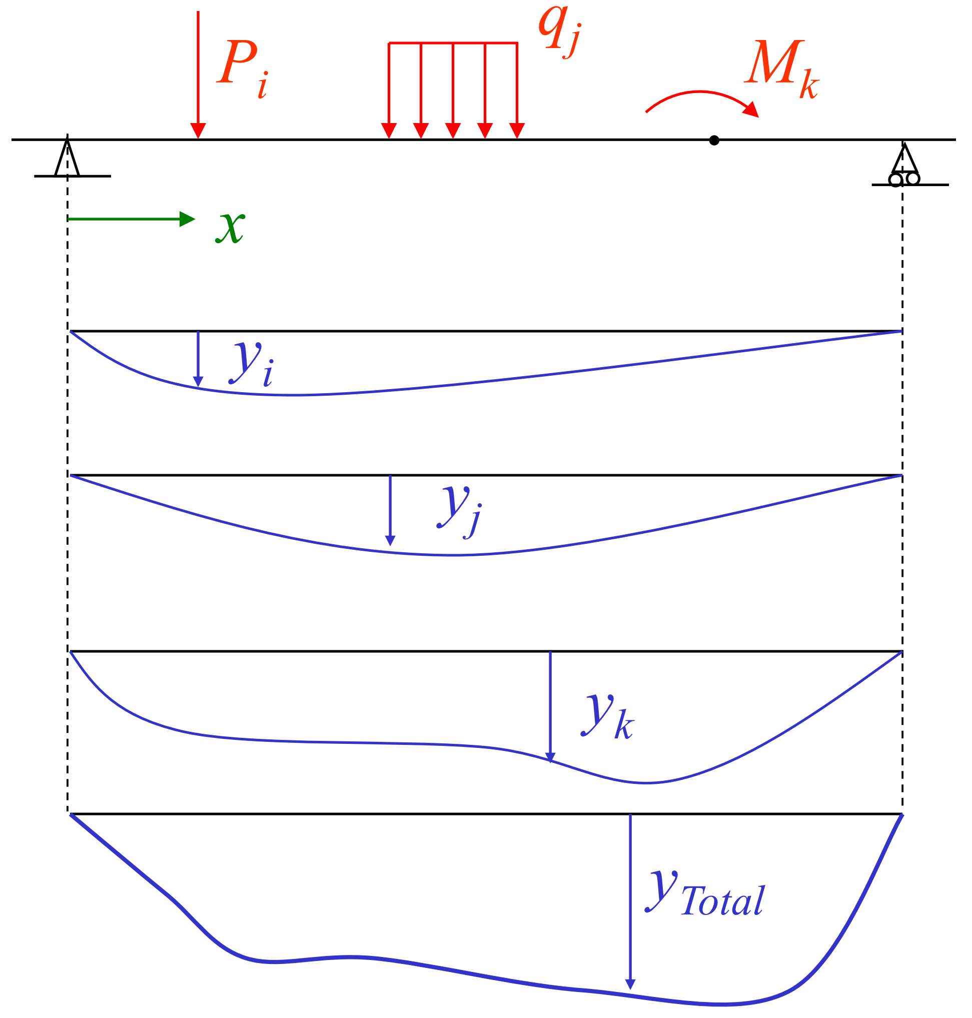


- $$y_1 = -\frac{P}{6EI}\left(3\,l\,x^2 - x^3\right) \overset{x=l}{=} -\frac{Pl^3}{3EI}$$

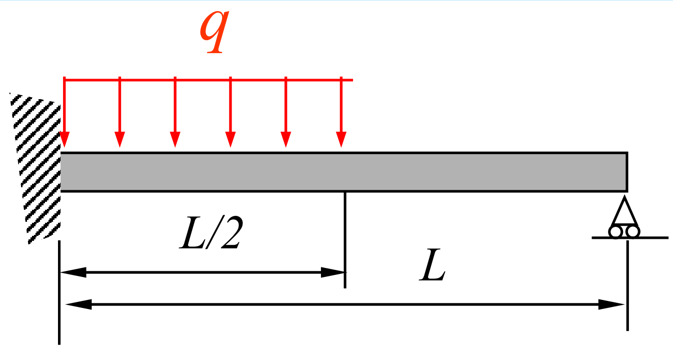
- $$y_2 = \frac{q}{24EI}\left(6\,l^2\,x^2 - 4\,l\,x^3 + x^4\right) \overset{x=l}{=} \frac{q\,l^4}{8EI}$$

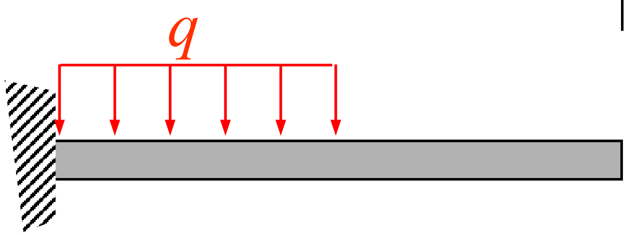
- $$y_T = y_1 + y_2$$

Superposition des déformations

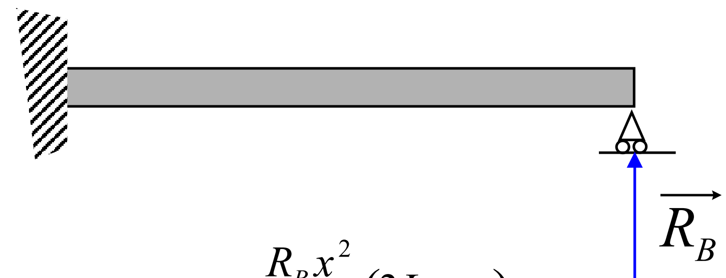


Poutres hyperstatiques





+



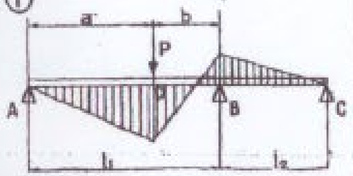
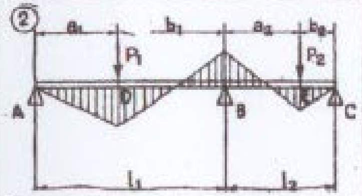
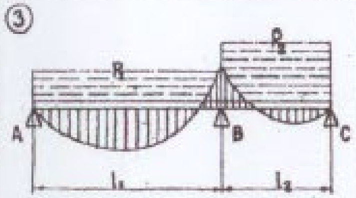
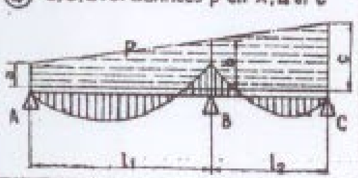
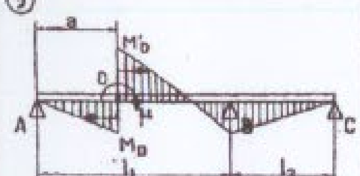
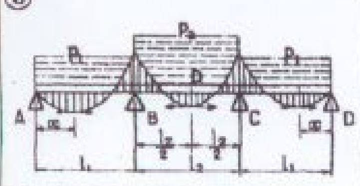
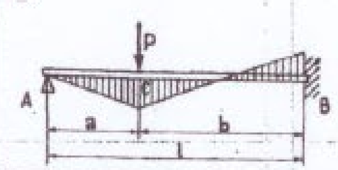
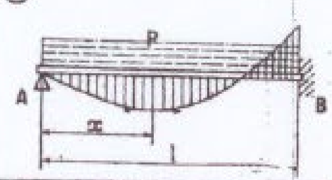
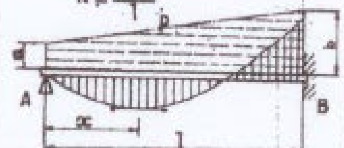
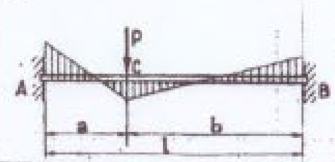
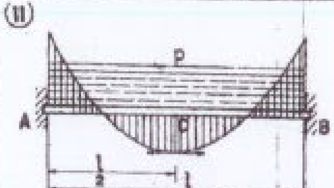
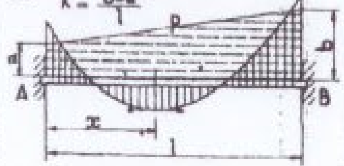
Pour $x \le \frac{L}{2}$; $\quad y_1 = \frac{qx^2}{48EI}\left(3L^2 - 4Lx + 2x^2\right)$

Pour $x \ge \frac{L}{2}$; $\quad y_2 = \frac{qL^3}{384EI}\left(8x - L\right)$

$$y_3 = -\frac{R_B x^2}{6EI}\left(3L - x\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour } x < \frac{L}{2}; \quad \rightarrow y_T = y_1 + y_3 \\ \text{Pour } x > \frac{L}{2}; \quad \rightarrow y_T = y_2 + y_3 \end{array}\right\} \text{Conditions aux bords } x = L \;\rightarrow y_T = 0 \;\rightarrow R_B = \frac{7qL}{128}; \quad \text{dans } y_3 \rightarrow y_T$$

Principaux cas particuliers de flexion des poutres droites hyperstatiques.

Cas de charge	Réactions	Moments fléchissants
① 	$R_A = -\frac{1}{l_1}(Pb + M_B)$ $R_B = -\frac{Pa}{l_1} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\frac{Pa}{(l_1+l_2)\,2l_1}(l_1^2 - a^2)$ $M_D = -R_A a$
② 	$R_A = \frac{1}{l_1}(P_1 b_1 + M_B)$ $R_B = -\frac{P_1 a_1}{l_1} - \frac{P_2 b_2}{l_2} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{1}{l_2}(P_2 a_2 + M_B)$	$M_D = -R_A a_1$ $M_B = \frac{\frac{P_1 a_1}{l_1}(l_1^2 - a_1^2) + \frac{P_2 b_2}{l_2}(l_2^2 - b_2^2)}{2(l_1+l_2)}$ $M_E = -R_C b_2$
③ 	$R_A = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_B}{l_1}$ $R_B = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_2 l_2}{2} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{p_2 l_2}{2} - \frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1+l_2)}$
④ a, b, c : ordonnées p en A, B et C 	$R_A = -\frac{M_B}{l_1} - \frac{l_1[l_1(2a+c) + 3al_2]}{6(l_1+l_2)}$ $R_B = M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $- \frac{1}{6}[l_1(a+2c) + l_2(2a+c)]$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2} - \frac{l_2[l_2(a+2c) + 3cl_1]}{6(l_1+l_2)}$	$M_B = -\frac{l_1^3(7a+8b) + l_2^3(7c+8b)}{120(l_1+l_2)}$
⑤ 	$R_A = \frac{1}{l_1}(\mu - M_B)$ $R_B = M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) - \frac{\mu}{l_1}$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\mu\frac{l_1^2 - 3a^2}{l_1(l_1+l_2)}$ $M_D = \frac{a}{l_1}(M_B - \mu)$ $M'_D = M_D + \mu$
⑥ 	$R_A = R_D = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_B}{l_1}$ $R_B = R_C = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_2 l_2}{2} + \frac{M_B}{l_1}$	$M_B = M_C = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(2l_1 + 3l_2)}$ $M_E = M_B + \frac{p_2 l_2^2}{8}$ M max travées AB et CD $= \frac{R_A^2}{2p_1} = \frac{R_D^2}{2p_1}$ à l'abscisse $x = \frac{l_1}{2} + \frac{M_B}{p_1 l_1}$
⑦ 	$R_A = -\frac{Pb^2}{2l^3}(3l - b)$ $R_B = -\frac{Pa}{2l^3}(3l^2 - a^2)$	$M_A = 0$ $M_B = -\frac{Pab}{2l}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$ $M_C = \frac{Pab^2}{2l^3}(3l - b)$
⑧ 	$R_A = -\frac{3}{8}pl$ $R_B = -\frac{8}{5}pl$	$M_B = -\frac{pl^2}{8}$ $M_{max} = \frac{l}{2p}R_A^2$ à l'abscisse $x = \frac{3}{8}l$
⑨ a et b : ordonnées de p en A et B $K = \frac{b-a}{l}$ 	$R = -\frac{1}{40}(11a + 4b)$ $R_B = -\frac{1}{40}(9a + 16b)$	$M_B = -\frac{l^2}{120}(70 + 8b)$ $M_{max} = \left(\frac{a + Kx}{3}\right)\frac{x^2}{2} - R_A x$ avec $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2KR_A}}{K}$
⑩ 	$R_A = -\frac{Pb^2}{l^3}(2a + l)$ $R_B = -\frac{Pa^2}{l^3}(2b + l)$	$M_A = -\frac{Pba^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_C = \frac{Pab}{l}\left(1 - \frac{2a^2}{l^2}\right)$
⑪ 	$R'_A = R_B = \frac{Pl}{2}$ Flèche en C : $v_C = \frac{pl^4}{384\,EI}$	$M_A = M_B = -\frac{pl^2}{12}$ $M_C = -\frac{M_A}{2} = \frac{pl^2}{24}$
⑫ a et b : ordonnées de p en A et B $K = \frac{b-a}{l}$ 	$R_A = -\frac{l}{20}(7a + 3b)$ $R_B = -\frac{l}{20}(7b + 3a)$	$M_A = -\frac{l^2}{60}(3a + 2b)$ $M_B = -\frac{l^2}{60}(2a + 3b)$ $M_{max} = \left(a + \frac{Kx}{3}\right)\frac{x^2}{2} - R_A x + M_A$ pour $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2KR_A}}{K}$